TD n° 0 : Révisions

Exercice 1. Dériver les fonctions ci-dessous dans leur domaine de définition :

$$f(x) = x^{2013}, \qquad g(x) = xe^{3x^2}, \qquad h(x) = x\ln(1+4x^2), \qquad k(x) = \frac{x}{1+9x},$$

$$m(x) = \cos(x), \qquad n(x) = \sin(x^2), \qquad p(x) = \frac{x-e^x}{1+\sin(x)}, \qquad q(x) = \arctan(2x).$$

Exercice 2. Calculer les intégrales :

$$I = \int_0^1 \sqrt{x}dx, \qquad J = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx, \qquad K = \int_{-1}^2 |x|dx.$$

Exercice 3. Calculer les intégrales :

$$I = \int_0^1 (x^2+x+1)dx, \qquad J = \int_{-1}^1 (1-2|x|)dx, \qquad K = \int_1^2 \left(x\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx.$$

Exercice 4. Calculer les intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)dx, \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos(x))dx, \qquad K = \int_0^2 \left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right) dx.$$

Exercice 5. Calculer

$$I = \int_1^2 \ln(x)dx, \qquad J = \int_0^1 e^{2x}dx, \qquad K = \int_1^2 2^x dx.$$

Exercice 6. Pour tout $x \in [1,2]$, on pose

$$u(x) = x^3 + x\ln x + 1.$$

1. Calculer, pour tout $x \in [1,2]$, $u'(x)$.
2. Calculer
$$I = \int_1^2 \frac{3x^2 + \ln(x) + 1}{x^3 + x\ln(x) + 1}dx.$$

Exercice 7. On pose

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+2}dx.$$

1. Déterminer l'unique entier a tel que, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\frac{x^2}{x+2} = x - a + \frac{4}{x+2}.$$

2. Calculer I.

Exercice 8. À l'aide d'intégrations par parties, calculer

$$I = \int_1^e x^2 \ln x dx, \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin(3x) dx, \qquad K = \int_1^e (2x+1)e^x dx.$$

Exercice 9. On pose

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \ln(\sin(x)) dx.$$

En faisant le changement de variables $y = \sin(x)$, calculer I.

Exercice 10. On pose

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx.$$

En faisant le changement de variables $x = y^2$, calculer I.

Exercice 11. On pose

$$I = \int_0^1 x e^x dx, \qquad J = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx.$$

1. En faisant une intégration par parties, montrer que $I = 1$.
2. En faisant le changement de variables $x = y^2$, calculer J.

Exercice 12. Donner la forme polaire de $1+i$, $1-i$ et $\sqrt{3}+i$.

Exercice 13. Soient a et b deux nombres complexes de module 1 tels que $ab \neq 1$. Montrer que

$$\frac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}.$$

Exercice 14. Soit z un nombre complexe de module 1. Calculer $|1+z|^2 + |1-z|^2$.