Correction du TD n° 1

Solution 1. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, on a

$$< \alpha\delta_x, \varphi >=< \delta_x, \alpha\varphi >= (\alpha\varphi)(x) = \alpha(x)\varphi(x) = \alpha(x) < \delta_x, \varphi >=< \alpha(x)\delta_x, \varphi > .$$

D'où l'égalité :

$$\alpha\delta_x = \alpha(x)\delta_x.$$

On en déduit que

$$x\delta = 0\delta = 0.$$

Solution 2. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, on a

$$\begin{aligned} < (\tau_a T)', \varphi > &= - < \tau_a T, \varphi' >= - < T, \tau_{-a}\varphi' >= - < T, (\tau_{-a}\varphi)' > \\ &= < T', \tau_{-a}\varphi >=< \tau_a(T'), \varphi > . \end{aligned}$$

On en déduit que

$$(\tau_a T)' = \tau_a(T').$$

Solution 3. La fonction H est $\mathcal{C}^1$ par morceau et a un saut en $x = a_1 = 0$ de taille 1. La formule des sauts donne

$$T_1' = \{H\}' = \delta.$$

La fonction $|x|$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par conséquent,

$$T_2' = \{|x|'\} = \mathrm{sgn}(x).$$

La fonction $\Pi(x)$ est $\mathcal{C}^1$ par morceau et a deux sauts :

- un saut en $x = a_1 = -1/2$ de taille 1,
- un saut en $x = a_2 = 1/2$ de taille -1.

La formule des sauts donne

$$T_3' = \{\Pi\}' = \delta_{-1/2} - \delta_{1/2}.$$

Remarque : on aurait aussi pu écrire $\Pi(x) = 1_{[-\frac{1}{2},\infty[}(x) - 1_{[\frac{1}{2},\infty[}(x)$ et conclure en utilisant encore la formule des sauts.

La fonction sgn est $\mathcal{C}^1$ par morceau et a un saut en $x = a_1 = 0$ de taille 2. La formule des sauts donne

$$T_4' = \{\mathrm{sgn}\}' = 2\delta.$$

La fonction $E(x)$ est $\mathcal{C}^1$ par morceau et a une infinité de sauts pour tous les $n \in \mathbb{Z}$ de taille 1. La formule des sauts donne

$$T_5' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n.$$

Solution 4.

1. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, on a

$$\begin{aligned} <(\alpha T)', \varphi> &= -<\alpha T, \varphi'>= -<T, \alpha\varphi'>= -<T, (\alpha\varphi)' - \alpha'\varphi> \\ &= -<T, (\alpha\varphi)'> + <T, \alpha'\varphi>=<T', \alpha\varphi> + <\alpha' T, \varphi> \\ &= <\alpha T', \varphi> + <\alpha' T, \varphi>=<\alpha T' + \alpha' T, \varphi> . \end{aligned}$$

   Par conséquent,

$$(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T'.$$

2. On a

$$T_1' = \{H\}' \sin(x) + \{H\}(\sin(x))' = \delta \sin(x) + \{H\} \cos(x) = \{H\} \cos(x).$$

   On a

$$T_2' = \{H\}' \cos(x) + \{H\}(\cos(x))' = \delta \cos(x) - \{H\} \sin(x) = \delta - \{H\} \sin(x).$$

   On a

$$\begin{aligned} T_3' &= \{\Pi\}' \sin(\pi x) + \{\Pi\}(\sin(\pi x))' = (\delta_{-1/2} - \delta_{1/2}) \sin(\pi x) + \{\Pi\}\pi \cos(\pi x) \\ &= \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \delta_{-1/2} - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \delta_{1/2} + \{\Pi\}\pi \cos(\pi x) = -\delta_{-1/2} - \delta_{1/2} + \{\Pi\}\pi \cos(\pi x). \end{aligned}$$

Solution 5.

1. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, on a $(\alpha\varphi)' = \alpha'\varphi + \alpha\varphi'$ et $<\delta', \varphi>= -<\delta, \varphi'>= -\varphi'(0)$. Donc

$$\begin{aligned} <\alpha\delta', \varphi> &= <\delta', \alpha\varphi>= -<\delta, (\alpha\varphi)'>= -<\delta, \alpha'\varphi + \alpha\varphi'> \\ &= -(\alpha'\varphi)(0) - (\alpha\varphi')(0) = -\alpha'(0)\varphi(0) - \alpha(0)\varphi'(0) \\ &= -\alpha'(0) <\delta, \varphi> + \alpha(0) <\delta', \varphi> \\ &= <-\alpha'(0)\delta + \alpha(0)\delta', \varphi> . \end{aligned}$$

   On en déduit que

$$\alpha\delta' = \alpha(0)\delta' - \alpha'(0)\delta.$$

   Remarque : On aurait aussi pu remarquer que

$$\begin{aligned} (\alpha\delta)' = \alpha'\delta + \alpha\delta' \quad &\Leftrightarrow \quad (\alpha(0)\delta)' = \alpha'(0)\delta + \alpha\delta' \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(0)\delta' = \alpha'(0)\delta + \alpha\delta' \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha\delta' = \alpha(0)\delta' - \alpha'(0)\delta. \end{aligned}$$

2. Par le résultat de la question 1, on a

   - $\sin(x)\delta' = \sin(0)\delta' - \cos(0)\delta = -\delta$,
   - $\cos(x)\delta' = \cos(0)\delta' + \sin(0)\delta = \delta'$,
   - $x^2\delta' = 0^2\delta' - 2 \times 0 \times \delta = 0$.

3. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, on a $(\alpha\varphi)'' = \alpha''\varphi + 2\alpha'\varphi' + \alpha\varphi''$, $<\delta', \varphi> = -<\delta, \varphi'> = -\varphi'(0)$ et $<\delta'', \varphi> = <\delta, \varphi''> = \varphi''(0)$. Donc

$$\begin{aligned} <\alpha\delta'', \varphi> &= <\delta'', \alpha\varphi> = <\delta, (\alpha\varphi)''> = <\delta, \alpha''\varphi + 2\alpha'\varphi' + \alpha\varphi''> \\ &= (\alpha''\varphi)(0) + 2(\alpha'\varphi')(0) + (\alpha\varphi'')(0) = \alpha''(0)\varphi(0) + 2\alpha'(0)\varphi'(0) + \alpha(0)\varphi''(0) \\ &= \alpha''(0) <\delta, \varphi> - 2\alpha'(0) <\delta', \varphi> + \alpha(0) <\delta'', \varphi> \\ &= <\alpha''(0)\delta - 2\alpha'(0)\delta' + \alpha(0)\delta'', \varphi> . \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\alpha\delta'' = \alpha''(0)\delta - 2\alpha'(0)\delta' + \alpha(0)\delta''.$$

La formule de Leibnitz nous donne

$$(\alpha\varphi)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{(k)}\varphi^{(n-k)}.$$

Cette formule combinée avec $\varphi^{(n-k)}(0) = <\delta, \varphi^{(n-k)}> = (-1)^{n-k} <\delta^{(n-k)}, \varphi>$ entraîne

$$\begin{aligned} <\alpha\delta^{(n)}, \varphi> &= <\delta^{(n)}, \alpha\varphi> = (-1)^n <\delta, (\alpha\varphi)^{(n)}> \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} <\delta, \alpha^{(k)}\varphi^{(n-k)}> \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{(k)}(0)\varphi^{(n-k)}(0) \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{(k)}(0) <\delta, \varphi^{(n-k)}> \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{(k)}(0)(-1)^{n-k} <\delta^{(n-k)}, \varphi> \\ &= <\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \alpha^{(k)}(0)\delta^{(n-k)}, \varphi> . \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\alpha\delta^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \alpha^{(k)}(0)\delta^{(n-k)}.$$

En appliquant la formule ci-dessus, on obtient

$$x\delta^{(n)} = (-1)^0 \binom{n}{0} 0 \times \delta^{(n)} + (-1)^1 \binom{n}{1} 1 \times \delta^{(n-1)} = -n\delta^{(n-1)}$$

et

$$\begin{aligned} x^3\delta^{(4)} &= (-1)^0 \binom{4}{0} 0^3 \times \delta^{(4)} + (-1)^1 \binom{4}{1} 3 \times 0^2 \times \delta^{(3)} \\ &+ (-1)^2 \binom{4}{2} 6 \times 0 \times \delta^{(2)} + (-1)^3 \binom{4}{3} 6 \times \delta' \\ &= -24\delta'. \end{aligned}$$

Solution 6.

1. On a

$$\begin{aligned} < x\delta', \varphi > &= < \delta', x\varphi >= - < \delta, (x\varphi)' >= - < \delta, \varphi + x\varphi' > \\ &= - < \delta, \varphi > - < \delta, x\varphi' >= -\varphi(0) - 0 \times \varphi'(0) \\ &= -\varphi(0) =< -\delta, \varphi > . \end{aligned}$$

   On en déduit que
$$x\delta' = -\delta.$$

2. Le résultat de la question 1 nous montre qu'une solution particulière de l'équation $xT = \delta$ est
$$T = -\delta'.$$
   Comme l'équation homogène $xT = 0$ a une infinité de solutions de la forme $T = a\delta$, où $a \in \mathbb{C}$, les solutions de notre équation sont de la forme
$$T = -\delta' + a\delta.$$

Solution 7.

1. On a
$$(e^{\lambda x}\{H\})' = \lambda e^{\lambda x}\{H\} + e^{\lambda x}\{H\} = \lambda e^{\lambda x}\{H\} + e^{\lambda x}\delta = \lambda e^{\lambda x}\{H\} + \delta.$$

2. Soit $T = e^{\lambda x}\{H\}$. Le résultat de la question 1 entraîne
$$T' = \lambda T + \delta.$$
   D'où le résultat.

3. On cherche les solutions de l'équation homogène
$$T' - \lambda T = 0.$$
   On a
$$T' - \lambda T = 0 \;\Leftrightarrow\; T'e^{-\lambda x} - \lambda e^{-\lambda x}T = 0 \;\Leftrightarrow\; (e^{-\lambda x}T)' = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{-\lambda x}T = a \;\Leftrightarrow\; T = ae^{\lambda x},$$
   où $a \in \mathbb{C}$. Comme, par le résultat de la question 2, $T = e^{\lambda x}\{H\}$ est une solution particulière de l'équation, $T' - \lambda T = \delta$ sont de la forme
$$T = (\{H\} + a)e^{\lambda x}.$$

Solution 8.

1. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, on a

$$\begin{aligned} < \{\ln(|x|)\}', \varphi > &= - < \{\ln(|x|)\}, \varphi' >= - \int_{\mathbb{R}} \ln(|x|)\varphi'(x)dx \\ &= - \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \ln(-x)\varphi'(x)dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \ln(x)\varphi'(x)dx \right). \end{aligned}$$

En faisant une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\epsilon}^{\infty} \ln(x)\varphi'(x)dx &= [\ln(x)\varphi(x)]_{\epsilon}^{\infty} - \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx \\
&= -\ln(\epsilon)\varphi(\epsilon) - \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx \\
&= -\epsilon\ln(\epsilon)\left(\frac{\varphi(\epsilon)-\varphi(0)}{\epsilon-0}\right) - \ln(\epsilon)\varphi(0) - \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx.
\end{aligned}$$

De même, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-\epsilon} \ln(-x)\varphi'(x)dx &= [\ln(-x)\varphi(x)]_{-\infty}^{-\epsilon} - \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx \\
&= \ln(\epsilon)\varphi(-\epsilon) - \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx \\
&= -\epsilon\ln(\epsilon)\left(\frac{\varphi(-\epsilon)-\varphi(0)}{-\epsilon-0}\right) + \ln(\epsilon)\varphi(0) - \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx.
\end{aligned}$$

En remarquant que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \epsilon\ln(\epsilon)\left(\frac{\varphi(\epsilon)-\varphi(0)}{\epsilon-0}\right) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \epsilon\ln(\epsilon)\varphi(0) = 0$$

et

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \epsilon\ln(\epsilon)\left(\frac{\varphi(-\epsilon)-\varphi(0)}{-\epsilon-0}\right) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \epsilon\ln(\epsilon)\varphi(0) = 0,$$

il vient

$$\begin{aligned}
< \{\ln(|x|)\}', \varphi > &= -\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \ln(-x)\varphi'(x)dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \ln(x)\varphi'(x)dx\right) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx\right) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx =< \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}, \varphi > .
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\{\ln(|x|)\}' = \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}.$$

2. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, on a

$$\begin{aligned}
< x\,\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}, \varphi > &= < \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}, x\varphi >= \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|x|>\epsilon} \frac{x\varphi(x)}{x}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|x|>\epsilon} \varphi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx =< \{1\}, \varphi > .
\end{aligned}$$

D'où

$$x\,\mathrm{vp}\,\frac{1}{x} = \{1\}.$$

3. Une solution particulière de l'équation $xT = \{1\}$ est

$$T = \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}.$$

Comme l'équation $xT = 0$ a une infinité de solutions de la forme $T = a\delta$, où a désigne une constante arbitraire, les solutions de notre équation sont de la forme

$$T = \mathrm{vp}\,\frac{1}{x} + a\delta.$$

Solution 9.

1. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, on a

$$\begin{aligned} < \mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2}, \varphi > &= < -\left(\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\right)', \varphi > = < \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}, \varphi' > = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi'(x)}{x} dx \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi'(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi'(x)}{x} dx \right). \end{aligned}$$

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi'(x)}{x} dx &= \left[\frac{\varphi(x)}{x} \right]_{\epsilon}^{\infty} - \int_{\epsilon}^{\infty} \varphi(x) \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= -\frac{\varphi(\epsilon)}{\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \\ &= -\left(\frac{\varphi(\epsilon) - \varphi(0)}{\epsilon - 0} \right) - \frac{\varphi(0)}{\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx. \end{aligned}$$

D'autre part, en faisant encore une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi'(x)}{x} dx &= \left[\frac{\varphi(x)}{x} \right]_{-\infty}^{-\epsilon} - \int_{-\infty}^{-\epsilon} \varphi(x) \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= \frac{\varphi(-\epsilon)}{-\epsilon} + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \\ &= \left(\frac{\varphi(-\epsilon) - \varphi(0)}{-\epsilon - 0} \right) - \frac{\varphi(0)}{\epsilon} + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx. \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} -\left(\frac{\varphi(\epsilon) - \varphi(0)}{\epsilon - 0} \right) = -\varphi'(0), \qquad \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\frac{\varphi(-\epsilon) - \varphi(0)}{-\epsilon - 0} \right) = \varphi'(0),$$

il vient

$$\begin{aligned} < \mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2}, \varphi > &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2\frac{\varphi(0)}{\epsilon} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2\frac{\varphi(0)}{\epsilon} \right). \end{aligned}$$

2. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, le résultat de la question 1 implique

$$\begin{aligned} < x\,\mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2}, \varphi > &= < \mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2}, x\varphi >= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_{|x|>\epsilon} \frac{x\varphi(x)}{x^2} dx - 2\frac{0\varphi(0)}{\epsilon} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$x\,\mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2} = \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}.$$

De même, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, le résultat de la question 1 implique

$$\begin{aligned} < x^2\,\mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2}, \varphi > &= < \mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2}, x^2\varphi >= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_{|x|>\epsilon} \frac{x^2\varphi(x)}{x^2} dx - 2\frac{0^2\varphi(0)}{\epsilon} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|x|>\epsilon} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx =< \{1\}, \varphi > . \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$x^2\,\mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2} = \{1\}.$$

Autre méthode : en utilisant les résultats des questions précédentes

$$x^2\,\mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2} = x\left(x\,\mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2} \right) = x\,\mathrm{vp}\,\frac{1}{x} = \{1\}.$$