Correction du TD n° 2

Solution 1.

1. Par définition, on a

$$f\{H\} * g\{H\} = \{fH\} * \{gH\} = \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(t)H(t)g(x-t)H(x-t)dt \right\}.$$

On a $H(t)H(x-t) = 1$ si et seulement si $x \geq t \geq 0$. Par conséquent,

$$f\{H\} * g\{H\} = \left\{ H(x) \int_0^x f(t)g(x-t)dt \right\}.$$

Le produit de convolution étant commutatif, i.e. $\{fH\} * \{gH\} = \{gH\} * \{fH\}$, il vient

$$f\{H\} * g\{H\} = \left\{ H(x) \int_0^x f(x-t)g(t)dt \right\}.$$

2. • En utilisant le résultat de la question 1, il vient

$$\begin{aligned} e^{\lambda x}\{H\} * e^{\lambda' x}\{H\} &= \left\{ H(x) \int_0^x e^{\lambda t} e^{\lambda'(x-t)} dt \right\} = \left\{ H(x) e^{\lambda' x} \int_0^x e^{t(\lambda-\lambda')} dt \right\} \\ &= \left\{ H(x) e^{\lambda' x} \left[\frac{1}{\lambda-\lambda'} e^{(\lambda-\lambda')t} \right]_0^x \right\} \\ &= \left\{ H(x) \left(\frac{e^{\lambda x} - e^{\lambda' x}}{\lambda - \lambda'} \right) \right\}. \end{aligned}$$

• De même, en utilisant le résultat de la question 1, il vient

$$e^{\lambda x}\{H\} * xe^{\lambda' x}\{H\} = \left\{ H(x) \int_0^x te^{\lambda t} e^{\lambda'(x-t)} dt \right\} = \left\{ H(x) e^{\lambda' x} \int_0^x te^{t(\lambda-\lambda')} dt \right\}.$$

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_0^x te^{t(\lambda-\lambda')} dt &= \left[t \frac{1}{\lambda-\lambda'} e^{t(\lambda-\lambda')} \right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{\lambda-\lambda'} e^{t(\lambda-\lambda')} dt \\ &= \frac{x}{\lambda-\lambda'} e^{x(\lambda-\lambda')} - \left[\frac{1}{(\lambda-\lambda')^2} e^{t(\lambda-\lambda')} \right]_0^x \\ &= \frac{x}{\lambda-\lambda'} e^{x(\lambda-\lambda')} - \frac{1}{(\lambda-\lambda')^2} (e^{x(\lambda-\lambda')} - 1). \end{aligned}$$

Au final, on obtient

$$e^{\lambda x}\{H\} * xe^{\lambda' x}\{H\} = \left\{ H(x) \left(\frac{x}{\lambda-\lambda'} e^{x\lambda} - \frac{1}{(\lambda-\lambda')^2} (e^{x\lambda} - e^{x\lambda'}) \right) \right\}.$$

Solution 2.

1. On a
$$\{S * T\} = \left\{ H(x) \int_0^x \sin(t)\sin(x-t)dt \right\}.$$
En utilisant la formule : $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$, il vient
$$\begin{aligned}\int_0^x \sin(t)\sin(x-t)dt &= \frac{1}{2}\int_0^x (\cos(t-(x-t)) - \cos(t+x-t))dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^x (\cos(2t-x) - \cos(x))dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2t-x)\right]_0^x - \frac{1}{2}x\cos(x) \\ &= \frac{1}{2}(\sin(x) - x\cos(x)).\end{aligned}$$
Au final, on a
$$\{S * T\} = \left\{ H(x)\frac{1}{2}(\sin(x) - x\cos(x)) \right\}.$$

2. On a
$$\{S * T\} = \left\{ H(x) \int_0^x (1-t)e^{\lambda(x-t)}dt \right\} = \left\{ H(x)e^{\lambda x} \int_0^x (1-t)e^{-\lambda t}dt \right\}.$$
En faisant une intégration par parties, il vient
$$\begin{aligned}\int_0^x (1-t)e^{-\lambda t}dt &= \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}(1-t)\right]_0^x - \int_0^x \left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right)(-1)dt \\ &= -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}(1-x) + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^x \\ &= -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}(1-x) + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}(e^{-\lambda x} - 1).\end{aligned}$$
On en déduit que
$$\{S * T\} = \left\{ H(x)\left(-\frac{1}{\lambda}(1-x) + \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x} + \frac{1}{\lambda^2}(1-e^{\lambda x})\right) \right\}.$$

Solution 3.

1. On a
$$(e^{\lambda x}\{H\})' = \lambda e^{\lambda x}\{H\} + e^{\lambda x}\{H\}' = \lambda e^{\lambda x}\{H\} + e^{\lambda x}\delta = \lambda e^{\lambda x}\{H\} + \delta.$$
On en déduit que $e^{\lambda x}\{H\}$ est une solution de
$$T' - \lambda T = \delta.$$

2. Par le résultat de la question 1, on a
$$(\delta' - \lambda\delta) * T = \delta' * T - \lambda\delta * T = T' - \lambda T = \delta.$$
Par conséquent,
$$(\delta' - \lambda\delta)^{*-1} = T.$$

3. Le résultat de la question 2 implique

$$\begin{aligned} & e^{\lambda x}\{H\} * e^{\lambda' x}\{H\} * (\delta' - \lambda\delta) * (\delta' - \lambda'\delta) \\ = \; & \left(e^{\lambda x}\{H\} * (\delta' - \lambda\delta)\right) * \left(e^{\lambda' x}\{H\} * (\delta' - \lambda'\delta)\right) \\ = \; & \delta * \delta = \delta. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$((\delta' - \lambda\delta) * (\delta' - \lambda'\delta))^{*-1} = e^{\lambda x}\{H\} * e^{\lambda' x}\{H\}.$$

4. Résoudre l'équation différentielle $(\delta'' - 5\delta' + 6\delta) * T = \delta$ dans $\mathcal{D}'_+$ consiste à déterminer l'inverse de convolution de $\delta'' - 5\delta' + 6\delta = (\delta' - 2\delta) * (\delta' - 3\delta)$. Le résultat de la question 3 et celui de l'exercice 1, question 2, entraînent

$$T = (\delta'' - 5\delta' + 6\delta)^{*-1} = e^{2x}\{H\} * e^{3x}\{H\} = \left\{H(x)(e^{3x} - e^{2x})\right\}.$$

Solution 4.

1. On a

$$\begin{aligned} T' &= \{e^x H\}' + \delta' = e^x\{H\} + e^x\{H\}' + \delta' = e^x\{H\} + e^x\delta + \delta' \\ &= e^x\{H\} + \delta + \delta' = T + \delta'. \end{aligned}$$

On en déduit que $T = e^x\{H\} + \delta$ est une solution de

$$T' - T = \delta'.$$

2. Le résultat de la question 1 entraîne

$$(T' - T) * \{H\} = \delta' * \{H\} = \{H\}' = \delta \;\Leftrightarrow\; ((\delta' - \delta) * \{H\}) * T = \delta$$

On en déduit que

$$T^{*-1} = (\delta' - \delta) * \{H\} = \delta' * \{H\} - \delta * \{H\} = \{H\}' - \{H\} = \delta - \{H\}.$$

Solution 5.

1. On a

$$\delta'' + \omega^2\delta = (\delta' - i\omega\delta) * (\delta' + i\omega\delta).$$

Par conséquent, en utilisant le résultat de l'exercice 1, question 2, il vient

$$\begin{aligned} (\delta'' + \omega^2\delta)^{*-1} &= (\delta' - i\omega\delta)^{*-1} * (\delta' + i\omega\delta)^{*-1} = e^{i\omega x}\{H\} * e^{-i\omega x}\{H\} \\ &= \left\{H(x)\left(\frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i\omega}\right)\right\} = \left\{H(x)\left(\frac{\sin(\omega x)}{\omega}\right)\right\}. \end{aligned}$$

2. En utilisant le résultat de la question 1, on obtient

$$(\delta'' + \delta) * \{H(x)\sin(x)\} * \{H\} = \delta * \{H\} = \{H\}.$$

Donc une solution de l'équation différentielle $(\delta'' + \delta) * T = \{H\}$ est

$$\begin{aligned} T &= \{H(x)\sin(x)\} * \{H\} = \left\{H(x)\int_0^x \sin(t)1(x-t)dt\right\} \\ &= \{H(x)\left[-\cos(t)\right]_0^x\} = \{H(x)(1 - \cos(x))\}. \end{aligned}$$

3. Comme $\delta' * \{H\} = \{H\}' = \delta$, on a

$$(\delta' + \{H\}) * T = \{H\} \;\Leftrightarrow\; \delta' * (\delta' + \{H\}) * T = \delta' * \{H\} \;\Leftrightarrow\; (\delta'' + \delta) * T = \delta.$$

Le résultat de la question 1 nous dit qu'une solution particulière pour T est

$$T = (\delta'' + \delta)^{*-1} = \{H(x)\sin(x)\}.$$

Solution 6. On a

$$T'' - T' - 2T = (\delta'' - \delta' - 2\delta) * T = (\delta' - 2\delta) * (\delta' + \delta) * T.$$

De plus, par le résultat de l'exercice 1, question 2,

$$\begin{aligned} T'' - T' - 2T = \delta &\;\Leftrightarrow\; (\delta' - 2\delta) * (\delta' + \delta) * T = \delta \\ &\Leftrightarrow\; T = ((\delta' - 2\delta) * (\delta' + \delta))^{*-1} = (\delta' - 2\delta)^{*-1} * (\delta' + \delta)^{*-1} \\ &= e^{2x} * \{H\} * e^{-x} * \{H\} = \left\{H(x)\frac{1}{3}(e^{2x} - e^{-x})\right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, si on pose

$$T = \left\{H(x)\frac{1}{3}(e^{2x} - e^{-x})\right\} * (\delta' + \{H\}),$$

il vient

$$\begin{aligned} T'' - T' - 2T &= (\delta' - 2\delta) * (\delta' + \delta) * T \\ &= \left((\delta' - 2\delta) * (\delta' + \delta) * \left\{H(x)\frac{1}{3}(e^{2x} - e^{-x})\right\}\right) * (\delta' + \{H\}) \\ &= \delta * (\delta' + \{H\}) = \delta' + \{H\}. \end{aligned}$$

On en déduit que T est solution de l'équation différentielle $T'' - T' - 2T = \delta' + \{H\}$ dans $\mathcal{D}'_+$.

Regardons une expression analytique de cette solution. On a

$$\begin{aligned} T &= \left\{H(x)\frac{1}{3}(e^{2x} - e^{-x})\right\} * (\delta' + \{H\}) \\ &= \delta' * \left\{H(x)\frac{1}{3}(e^{2x} - e^{-x})\right\} + \{H\} * \left\{H(x)\frac{1}{3}(e^{2x} - e^{-x})\right\} \\ &= \left\{H(x)\frac{1}{3}(e^{2x} - e^{-x})\right\}' + \left\{H(x)\frac{1}{3}\int_0^x (e^{2t} - e^{-t})1(x-t)dt\right\} \\ &= \left\{H'(x)\frac{1}{3}(e^{2x} - e^{-x})\right\} + \left\{H(x)\frac{1}{3}(2e^{2x} + e^{-x})\right\} + \left\{H(x)\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}e^{2x} + e^{-x} - \frac{3}{2}\right)\right\} \\ &= \left\{\delta\frac{1}{3}(e^{2x} - e^{-x})\right\} + \left\{H(x)\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}e^{2x} + 2e^{-x} - \frac{3}{2}\right)\right\} \\ &= \left\{H(x)\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}e^{2x} + 2e^{-x} - \frac{3}{2}\right)\right\}. \end{aligned}$$