

## TD n° 2 : Convolution des distributions

### Exercice 1.

1. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions localement intégrables. Montrer que

$$f\{H\} * g\{H\} = \{fH\} * \{gH\} = \left\{ H(x) \int_0^x f(t)g(x-t) dt \right\} = \left\{ H(x) \int_0^x f(x-t)g(t) dt \right\}.$$

2. Soit  $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$  avec  $\lambda \neq \lambda'$ .

- Calculer  $e^{\lambda x}\{H\} * e^{\lambda' x}\{H\}$ .
- Calculer  $e^{\lambda x}\{H\} * xe^{\lambda' x}\{H\}$ .

### Exercice 2.

 Calculer  $S * T$  dans les deux cas suivants :

1.  $S = T = \sin(x)\{H\}$ .
2.  $S = (1-x)\{H\}$  et  $T = e^{\lambda x}\{H\}$ .

### Exercice 3.

 Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $e^{\lambda x}\{H\}$  est une solution de  $T' - \lambda T = \delta$ .
2. En déduire l'inverse de convolution de  $\delta' - \lambda\delta$  dans  $\mathcal{D}'_+$ .
3. Montrer que  $e^{\lambda x}\{H\} * e^{\lambda' x}\{H\}$  est l'inverse de convolution de  $(\delta' - \lambda\delta) * (\delta' - \lambda'\delta)$  dans  $\mathcal{D}'_+$ .
4. Appliquer ce résultat à la résolution de  $(\delta'' - 5\delta' + 6\delta) * T = \delta$  dans  $\mathcal{D}'_+$ .

### Exercice 4.

1. Trouver une équation différentielle vérifiée par  $T = e^x\{H\} + \delta$  dans  $\mathcal{D}'_+$ .
2. En déduire l'inverse de convolution de  $T$  dans  $\mathcal{D}'_+$ .

### Exercice 5.

 Soit  $\omega \in \mathbb{R}$ .

1. Résoudre l'équation de convolution  $(\delta'' + \omega^2\delta) * T = \delta$  dans  $\mathcal{D}'_+$ .
2. En déduire la résolution de  $(\delta'' + \delta) * T = \{H\}$  dans  $\mathcal{D}'_+$ .
3. En déduire une solution de  $(\delta' + \{H\}) * T = \{H\}$  dans  $\mathcal{D}'_+$ .

### Exercice 6.

 Résoudre l'équation différentielle dans  $\mathcal{D}'_+$ 

$$T'' - T' - 2T = \delta' + \{H\}.$$