TD n° 4 : Intégration sur des contours

Exercice 1. Calculer

$$\int_{\Gamma} \overline{z}^2 dz$$

le long des chemins suivants :

- Γ est la droite allant de $(0,0)$ à $(1,1)$ (*On explorera* 2 *méthodes*).
- Γ est composé du segment de droite allant de $(0,0)$ à $(1,0)$ et du segment de droite allant de $(1,0)$ à $(1,1)$.
- Γ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.
- Γ est le chemin joignant $(1,1)$ et $(2,4)$ le long de la parabole $y = x^2$.

Exercice 2. Calculer

$$\int_{\Gamma} (z^2 + 3z) dz,$$

où Γ est le chemin allant de $(2,0)$ à $(0,2)$ le long du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 2.

Exercice 3. Calculer

$$\int_{\mathcal{T}} z dz,$$

où $\mathcal{T}$ désigne le triangle orienté OAB avec O de coordonnées $(0,0)$, A (1,1) et B (1,0). Le résultat obtenu était-il prévisible ?

Exercice 4. En utilisant la formule de Cauchy, calculer

$$\int_{C} \frac{|z|}{z^3} e^z dz,$$

où C est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 3.

Exercice 5.

1. En utilisant la formule de Cauchy, calculer

$$\int_{C} \frac{e^z}{z} dz,$$

   où C est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

2. En déduire que

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos(t)} \cos(\sin(t)) dt = 2\pi.$$

Exercice 6.

1. En utilisant la formule de Cauchy, montrer que
$$\int_C \left(2+z+\frac{1}{z}\right)\frac{f(z)}{z}dz = 2i\pi(2f(0)+f'(0)),$$
où C est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

2. En déduire que
$$\int_0^{2\pi} f(e^{it})\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)dt = \frac{\pi}{2}(2f(0)+f'(0)).$$

Exercice 7. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a > 1$, n un entier positif et Γ le cercle de centre 0 et de rayon 1.

1. En utilisant la formule de Cauchy, calculer
$$\int_\Gamma \frac{z^n}{(z-a)(z-\frac{1}{a})}dz.$$

2. Démontrer l'égalité suivante, pour tout $t, \lambda \in \mathbb{R}$.
$$e^{2it}+\lambda e^{it}+1 = e^{it}(2\cos(t)+\lambda).$$

3. En utilisant un paramétrage de Γ, en déduire la valeur de
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{1-2a\cos(t)+a^2}dt.$$

Exercice 8. On pose
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}dt.$$

1. Montrer que
$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R^1} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz = I,$$
où Γ_R^1 est le segment de droite allant de $(-R,0)$ à $(R,0)$.

2. Montrer que
$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R^2} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz = 0,$$
où Γ_R^2 est le demi cercle de rayon R allant de $(R,0)$ à $(-R,0)$.

3. Pour tout $R > 0$, soit Γ_R le chemin défini par $\Gamma_R = \Gamma_R^1 \cup \Gamma_R^2$, où Γ_R^1 est celui de la question 1 et Γ_R^2 celui de la question 2. Montrer, par une formule appropriée, que
$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz = \frac{\pi}{e}.$$

4. En déduire la valeur de I.

Exercice 9. On pose

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + 2\cos t} dt.$$

1. Montrer que

$$I = -i \int_\Gamma \frac{1}{(z - z_0)(z - z_1)} dz,$$

où Γ est le cercle de centre 0 et de rayon 1, $z_0 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ et $z_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$.

2. Calculer I via la formule de Cauchy.