Correction du TD n° 4

Rappels (Résidus). Le résidu d'une fonction f en un pôle a d'ordre n est défini par

$$Res(f,a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \left((z-a)^n f(z)\right)^{(n-1)}.$$

Rappels (Théorème des résidus). Soit f une fonction analytique partout à l'intérieur, et sur une courbe fermée simple Γ excepté en un nombre fini de points $a_1, \ldots, a_m$ intérieurs à Γ. Alors on a

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{m} Res(f, a_k).$$

Solution 1.

1. • Les pôles de f sont $\{2, i, -i\}$. On a

$$Res(f,2) = \lim_{z\to 2}(z-2)f(z) = \lim_{z\to 2} \frac{z^2}{z^2+1} = \frac{4}{5},$$

$$Res(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i} \frac{z^2}{(z-2)(z+i)} = \frac{1-2i}{10}$$

et

$$Res(f,-i) = \lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = \lim_{z\to -i} \frac{z^2}{(z-2)(z-i)} = \frac{1+2i}{10}.$$

• Les pôles de g sont $\{0, -2\}$. On a

$$Res(g,0) = \lim_{z\to 0}(z-0)g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{(z+2)^3} = \frac{1}{8}$$

et, le pôle -2 étant d'ordre 3,

$$Res(g,-2) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to -2} \left((z+2)^3 g(z)\right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z\to -2} \frac{2}{z^3} = -\frac{1}{8}.$$

• h n'a qu'un pôle: 3. Celui-ci est d'ordre 2. On a

$$Res(h,3) = \frac{1}{1!} \lim_{z\to 3} \left((z-3)^2 h(z)\right)' = \lim_{z\to -2}(e^{2z} + 2ze^{2z}) = 7e^6.$$

2. (a) Les pôles de f sont $\{2, i, -i\}$. Comme seuls $\{i, -i\}$ appartiennent à l'intérieur de Γ, il vient

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2i\pi \left(Res(f,-i) + Res(f,i)\right) = 2i\pi \left(\frac{1+2i}{10} + \frac{1-2i}{10}\right) = \frac{2i\pi}{5}.$$

(b) Les pôles de f sont $\{2, i, -i\}$. Ils appartiennent à l'intérieur de Γ. Donc

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)dz &= 2i\pi \left(Res(f,2) + Res(f,-i) + Res(f,i)\right) \\ &= 2i\pi \left(\frac{4}{5} + \frac{1+2i}{10} + \frac{1-2i}{10}\right) = 2i\pi.\end{aligned}$$

3. (a) Les pôles de g sont $\{0, -2\}$. Comme seul 0 appartient à l'intérieur de Γ, il vient

$$\int_\Gamma g(z)dz = 2i\pi Res(g, 0) = 2i\pi\frac{1}{8} = \frac{i\pi}{4}.$$

   (b) Les pôles de g sont $\{0, -2\}$. Ils appartiennent à l'intérieur de Γ. Donc

$$\int_\Gamma g(z)dz = 2i\pi\left(Res(g, 0) + Res(g, -2)\right) = 2i\pi\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 0.$$

4. Le pôle de h est 3 et il appartient à l'intérieur de Γ. Donc

$$\int_\Gamma h(z)dz = 2i\pi Res(h, 3) = 2i\pi \times 7e^6 = 14i\pi e^6.$$

Solution 2.

1. On peut paramétrer Γ par $z = e^{it}$, avec $t \in [0, 2\pi]$. On a alors

$$dz = ie^{it}dt = izdt \;\Leftrightarrow\; dt = \frac{1}{iz}dz, \qquad \sin t = \frac{z - z^{-1}}{2i}.$$

   Par conséquent,

$$I = \int_\Gamma \frac{1}{\left(5 - 3\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\right)^2}\frac{1}{iz}dz = 4i\int_\Gamma \frac{z}{(3z^2 - 10iz - 3)^2}dz.$$

2. On pose

$$f(z) = \frac{z}{(3z^2 - 10iz - 3)^2}.$$

   Les pôles éventuels de f sont les z annulant $P(z) = 3z^2 - 10iz - 3$. Le discriminant de $P(z)$ est $\Delta = (-10i)^2 - 4 \times 3 \times (-3) = -64$. Comme $\Delta < 0$, le polynôme a 2 racines complexes :

$$z_1 = \frac{-(-10i) + i\sqrt{-\Delta}}{2 \times 3} = \frac{18i}{6} = 3i$$

   et

$$z_2 = \frac{-(-10i) - i\sqrt{-\Delta}}{2 \times 3} = \frac{2i}{6} = \frac{1}{3}i.$$

   Par conséquent, $P(z) = 3(z - z_1)(z - z_2)$. Les pôles de f sont $\{z_1, z_2\}$ et sont tous deux d'ordre 2. Le seul pôle à l'intérieur de Γ est z_2. On a

$$Res(f, z_2) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to z_2}\left((z - z_2)^2 f(z)\right)' = -\frac{5}{256}.$$

   Le théorème des résidus entraîne

$$J = \int_\Gamma \frac{z}{(3z^2 - 10iz - 3)^2}dz = 2i\pi Res(f, z_2) = -\frac{10i\pi}{256}.$$

   Il s'ensuit

$$I = 4iJ = \frac{5\pi}{32}.$$

Solution 3.

1. Les pôles éventuels de f sont les z vérifiant $1 = e^z = 0$, soit $e^z = -1$. Donc
$$z = i(2k+1)\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$
Ce sont des pôles simples.

2. On a
$$|f(x+iy)|^2 = \frac{e^{2ax}}{|1 - e^x(\cos y + i \sin y)|^2}.$$
Or, en utilisant $\cos y \geq -1$,
$$\begin{aligned} |1 - e^x(\cos y + i \sin y)|^2 &= (1 + e^x \cos y)^2 + e^{2x} \sin^2 y \\ &= 1 + 2e^x \cos y + e^{2x} \cos^2 y + e^{2x} \sin^2 y \\ &\geq 1 - 2e^x + e^{2x} = (1 - e^x)^2. \end{aligned}$$
Il vient
$$|f(x+iy)| \leq \sqrt{\frac{e^{2ax}}{(1-e^x)^2}} = \frac{e^{ax}}{|1 - e^x|}.$$

3. Soit Γ_R le rectangle de sommets $\pm R$, $\pm R + 2i\pi$. Le seul pôle de f à l'intérieur de Γ_R est $i\pi$. Le théorème des résidus nous assure que
$$I_R = \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2i\pi Res(f, i\pi),$$
avec
$$Res(f, i\pi) = \lim_{z \to i\pi} ((z - i\pi)f(z)) = e^{ia\pi}.$$
L'intégrale I_R se décompose en 4 parties.

   - sur $[-R, R]$, on a
   $$\int_{[-R,R]} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx.$$
   - sur $[R + 2i\pi, -R + 2i\pi]$, on a
   $$\begin{aligned} \int_{[R+2i\pi,-R+2i\pi]} f(z)dz &= \int_{R}^{-R} f(x + 2i\pi)dx \\ &= e^{2ai\pi} \int_{[R,-R]} f(x)dx = -e^{2ai\pi} \int_{[-R,R]} f(y)dy. \end{aligned}$$
   - sur le côté vertical $[R, R + 2i\pi]$, on a
   $$\int_{[R,R+2i\pi]} f(z)dz = i \int_0^{2\pi} f(R + it)dt.$$
   Le résultat de la question 2- appliqué avec $x = R$ donne
   $$\left| \int_{[R,R+2i\pi]} f(z)dz \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(R + it)|dt \leq 2\pi \frac{e^{aR}}{|1 - e^R|}.$$

- de même, sur le côté vertical $[-R+2i\pi, -R]$, on a

$$\int_{[-R+2i\pi,-R]} f(z)dz = i\int_{2\pi}^{0} f(-R+it)dt.$$

Le résultat de la question 2- appliqué avec $x=-R$ donne

$$\left|\int_{[R,R+2i\pi]} f(z)dz\right| \leq \int_0^{2\pi} |f(-R+it)|dt \leq 2\pi\frac{e^{-aR}}{|1-e^{-R}|}.$$

En faisant tendre R vers l'infini, on obtient

$$2i\pi e^{ia\pi} = \lim_{R\to\infty} I_R = (1-e^{2ai\pi})I.$$

Donc

$$I = \frac{2i\pi e^{ia\pi}}{1-e^{2ai\pi}} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$