

TD n° 5 : Théorème des résidus

Exercice 1.

1. Trouver les pôles et les résidus associés des fonctions suivantes:

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}, \quad g(z) = \frac{1}{z(z+2)^3}, \quad h(z) = \frac{ze^{2z}}{(z-3)^2}.$$

2. Calculer $\int_{\Gamma} f(z)dz$, où

- (a) Γ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\frac{3}{2}$,
- (b) Γ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 10.

3. Calculer $\int_{\Gamma} g(z)dz$, où

- (a) Γ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1,
- (b) Γ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 3.

4. Calculer $\int_{\Gamma} h(z)dz$, où Γ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 4.

Exercice 2.

 On pose

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-3\sin(t))^2} dt.$$

1. Montrer que

$$I = 4i \int_{\Gamma} \frac{z}{(3z^2 - 10iz - 3)^2} dz,$$

où Γ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

2. Montrer que

$$I = \frac{5\pi}{32}.$$

Exercice 3.

 Soit $a \in]0, 1[$. On pose

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

1. Déterminer les pôles de f .

2. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|f(x+iy)| \leq \frac{e^{ax}}{|1-e^x|}.$$

3. Calculer

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx$$

en intégrant f sur le rectangle de sommets $\pm R, \pm R + 2i\pi$, et en faisant $R \rightarrow \infty$.

4. Dans le cas particulier où $a = \frac{1}{2}$, retrouver la valeur de I par un calcul direct.