TD n° 0 : Quelques révisions

Exercice 1. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB, BA, BC, CA, CC et DB.

Exercice 2. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & a-2 \\ a-3 & a-4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 0 & 1 & 2b \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(A)$, $\det(B)$ et $\det(C)$.

Exercice 3. Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^{-1}.

Exercice 4. Soient A et I_3 les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $A^2 = -A + 2I_3$.
2. Calculer A^{-1} en utilisant le résultat de la question 1.

Exercice 5. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\det(A)$. Est-ce que A est inversible ?
2. Calculer A^{-1}.

Exercice 6. Soient X et Y deux *var iid* suivant chacune la loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

1. Montrer que (U, V) est un *carg*.

2. Montrer que U et V sont indépendantes.

3. Donner la loi usuelle que suit la *var* $K = \frac{1}{2}(U^2 + V^2)$.

Exercice 7. Soit (X, Y) un *carg* centré tel que $\mathbb{E}(X^2) = 4$ et $\mathbb{E}(Y^2) = 1$, et les *var* $2X + Y$ et $X - 3Y$ sont indépendantes.

1. Déterminer la matrice de covariance de (X, Y).

2. Montrer que le *car* $(X + Y, 2X - Y)$ est gaussien. Déterminer sa matrice de covariance.

Exercice 8. Soient X_1 et X_2 deux *var iid* suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Soit $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$ le *car* tel que

$$\mathbf{Y}^t = \mathbf{A}\mathbf{X}^t + \mathbf{M}^t,$$

où $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ et $\mathbf{M} = (2, 3)$.

1. Déterminer la loi de $\mathbf{Y}$.

2. Déterminer la loi du *car* $(Y_1 + Y_2 + 1, 3Y_1 - Y_2)$.

3. Déterminer la loi de $Y_1 + Y_2 + 1$, et la loi de $3Y_1 - Y_2$.

Exercice 9. Soient $\rho \in]-1, 1[$ et (X, Y) un *vectar* suivant la loi $\mathcal{N}_2(0_2, \mathbf{V})$, avec

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une densité de (X, Y).

2. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, le *car* $(X, Y - aX)$ est gaussien.

3. Déterminer l'unique réel c pour lequel X et $Y - cX$ sont indépendantes.

4. Calculer $\mathbb{V}(Y - cX)$, où c désigne le réel déterminé à la question 3.

Exercice 10. Soit (X, Y, Z) un *vectarg*. On pose $U = X + Y + Z$ et $V = X - Y$.

1. Montrer que le *car* (U, V) est gaussien.

2. À quelle condition sur la matrice de covariance de (X, Y, Z) les *var* U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 11. Soient U, V, W, X et Y cinq *var* indépendantes, avec U, V et W identiquement distribuées suivant chacune la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, X suit la loi $\chi^2(16)$ et Y suit la loi $\chi^2(4)$. Reconnaître les lois usuelles que suivent les *var* :

$$K = U^2 + V^2 + W^2, \qquad T = \frac{4U}{\sqrt{X}}, \qquad F = \frac{X}{4Y}.$$