TD n° 1 : Révisions 1

Exercice 1. Une usine fabrique des objets d'un certain type. Chacun d'entre eux est constitué de deux éléments a et b. On tire au hasard l'un des objets dans la production. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé adapté à cette expérience aléatoire. On considère les événements

- $A =$ "l'élément a de l'objet présente un défaut de fabrication",
- $B =$ "l'élément b de l'objet présente un défaut de fabrication".

On suppose que A et B sont indépendants, et $\mathbb{P}(A) = 0,1$ et $\mathbb{P}(B) = 0,2$.

1. Dire, en une phrase, ce que représente $\mathbb{P}(A \cap B)$. Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$.
2. Dire, en une phrase, ce que représente $\mathbb{P}(A \cup B)$. Calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$.

Exercice 2.

1. Soient $p \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et X une *var* suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$:
$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k \in \{0, \ldots, n\}.$$
On pose $Y = n - X$. Montrer que Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,q)$ avec $q = 1 - p$.
2. Dans une exploitation agricole, 100 bovins se répartissent au hasard et indépendamment les uns des autres dans 3 étables : étable 1, étable 2 et étable 3. On suppose que chaque étable peut abriter la totalité du troupeau. Pour tout $i \in \{1,2,3\}$, X_i est la *var* égale au nombre de bovins ayant choisi l'étable i.
   (a) Déterminer, pour tout $i \in \{1,2,3\}$, la loi de X_i.
   (b) Que vaut $X_1 + X_2 + X_3$? En déduire la loi de la *var* $Z = X_1 + X_2$.

Exercice 3. Montrer que la fonction g définie ci-dessous est une densité :
$$g(x) = \begin{cases} (3x-1)^2 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 4. Soit X une *var* suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, *i.e.* de densité :
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $Y = \ln(e^X - 1)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y, puis une densité de Y.
2. Calculer $\mathbb{P}(Y < 0)$, $\mathbb{P}(Y \geq 1)$ et $\mathbb{P}(-1 \leq Y < 1)$.

Exercice 5. Soit X une *var* suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On pose $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$.

1. Montrer que Y suit la normale $\mathcal{N}(0,1)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(Y > 0)$, $\mathbb{E}(2Y + 2018)$ et $\mathbb{V}(1 - Y)$.

Exercice 6. Soit X une *var* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\ln 2)(2+x)} & \text{si } x \in [-1,2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer $\mathbb{P}(X < 0)$.
2. Calculer $\mathbb{E}(2 + X)$, $\mathbb{E}\left(X(2+X)\right)$ et $\mathbb{E}\left(X^2\right)$.
3. On pose $Y = \dfrac{1}{3-X}$. Déterminer une densité de Y.

Exercice 7. Soit X une *var* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition de X.
2. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)$ *(on utilisera les propriétés de la densité associée à la loi normale* $\mathcal{N}(0,1)$*)*.
3. Calculer, pour tout $a > 0$, $\mathbb{E}(e^{-aX^2})$.

Exercice 8. Des pièces rectangulaires sont fabriquées par une usine. La longueur en millimètres d'une pièce choisie au hasard de la production peut être modélisée par une *var* X suivant la loi normale $\mathcal{N}(8,(1,5)^2)$, et sa largeur peut être modélisée par une *var* Y suivant la loi normale $\mathcal{N}(4,1)$. On suppose que X et Y sont indépendantes. Une pièce est considérée comme conforme si sa longueur ℓ et sa largeur L vérifient $6 \leq \ell \leq 9,5$ et $3,5 \leq L \leq 5,5$.

1. Calculer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production soit non conforme.
2. Calculer l'aire moyenne d'une pièce rectangulaire fabriquée par l'usine.

Exercice 9. Soient $\rho \in]-1,1[$ et (X,Y) un *car* suivant la loi $\mathcal{N}_2(0, \mathbf{V})$, avec

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$K = \frac{(X-Y)^2}{2-2\rho} + \frac{(X+Y)^2}{2+2\rho}.$$

Montrer que K suit la loi du Chi-deux $\chi^2(2)$.