TD n° 2 : Révisions 2

Exercice 1. Soient $p \in]0,1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid*. La loi de X_1 est donnée par

$$\mathbb{P}(X_1 = -1) = (1-p)^2, \qquad \mathbb{P}(X_1 = 0) = 2p(1-p), \qquad \mathbb{P}(X_1 = 1) = p^2.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1+X_i}{2}.$$

1. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_1)$.
2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(Z_n)$ et $\mathbb{V}(Z_n)$.
3. Déterminer, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, une majoration de $\mathbb{P}(|Z_n - p| \geq \epsilon)$ en fonction de ϵ, p et n.
4. Montrer que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers p.
5. Retrouver le résultat de la question 4 en utilisant un théorème précis.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, *i.e.* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$Z_n = \frac{X_n}{\ln(n)}.$$

Montrer que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$, *i.e.* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$U_n = n \inf(X_1, \ldots, X_n).$$

1. Déterminer la fonction de répartition de U_n.
2. Étudier la convergence en loi de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, *i.e.* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$W_n = \sup(X_1, \ldots, X_n) - \ln(n).$$
Étudier la convergence en loi de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 5. Soient $\lambda > 0$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var*. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$:
$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}, \qquad k \in \{0, \ldots, n\}.$$

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction génératrice de X_n.
2. Étudier la convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 6. Une entreprise fabrique, en grande quantité, des tiges métalliques cylindriques pour l'industrie. Dans un lot, 3% des tiges n'ont pas une longueur conforme. On prélève au hasard 50 tiges d'un lot pour vérification. Les tiges de ce lot sont suffisamment nombreuses pour que l'on puisse assimiler ces prélèvement à des tirages avec remise. On considère la *var* X qui, à tout prélèvement de 50 tiges, associe le nombre de tiges non conformes pour la longueur.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'au plus deux tiges ne soient pas conformes pour la longueur.
3. Montrer que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson.
4. Calculer la probabilité approchée qu'au plus deux tiges ne soient pas conformes pour la longueur.

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$R_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 1).$$
Montrer que $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.

Exercice 8. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid*. La densité de X_1 est
$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$\widetilde{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|.$$

1. Calculer $\mathbb{E}(|X_1|)$ et $\mathbb{V}(|X_1|)$.
2. Étudier la convergence en probabilité de $(\widetilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\widetilde{X}_n \le \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\right) = 0,8413.$$