

TD n° 6 : Méthodes d'estimation

Exercice 1. Soient $a > 0$, X une *var* dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{a}{a+1}, \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{a+1},$$

$n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon de X . Ici, a est un paramètre inconnu que l'on souhaite estimer à l'aide de $(X_1, \dots, X_n)$.

Déterminer un estimateur de a par la méthode des moments.

Exercice 2. Soient $\theta > -1$, X une *var* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)(\theta+2)(1-x)x^\theta & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon de X . Ici, θ est un paramètre inconnu que l'on souhaite estimer à l'aide de $(X_1, \dots, X_n)$.

Déterminer un estimateur de θ par la méthode des moments.

Exercice 3. Soient $p \in]0, 1[$, X une *var* de densité :

$$f(x) = p \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + (1-p) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon de X . Ici, p est un paramètre inconnu que l'on souhaite estimer à l'aide de $(X_1, \dots, X_n)$.

Déterminer un estimateur de p par la méthode des moments.

Exercice 4. Soient $\lambda > 0$ et X une *var* suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon de X . Ici, λ est un paramètre inconnu que l'on souhaite estimer à l'aide de $(X_1, \dots, X_n)$.

Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ .

Exercice 5. La hauteur maximale en mètres de la crue annuelle d'un fleuve est une *var* X de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} e^{-\frac{x^2}{2a}} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $a > 0$ est un réel inconnu. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon de X .

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{a}_n$ de a .
2. *Application.* Une crue supérieure à 6 mètres serait catastrophique. Pendant 8 ans, on a observé les hauteurs de crue du fleuve en mètres.

Les résultats sont :

2,5	2,9	1,8	0,9	1,7	2,1	2,2	2,8
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Donner une estimation ponctuelle de a et une estimation de la probabilité d'avoir une catastrophe une année donnée.

Exercice 6. Soient $\alpha \geq 0$, $\sigma > 0$, $\theta > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, $(Y_1, \dots, Y_n)$ un vecteur de n var telles que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$Y_i = \frac{\theta}{i^\alpha} + \sigma X_i,$$

où $(X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur de n var *iid* suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Ici, θ est un paramètre inconnu que l'on souhaite estimer à l'aide de $(Y_1, \dots, Y_n)$.

1. Déterminer la vraisemblance et la log-vraisemblance de $(Y_1, \dots, Y_n)$.
2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n$ de θ .
3. Est-ce que $\hat{\theta}_n$ est sans biais ? Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $\hat{\theta}_n$ converge.

Exercice 7. Soient $\alpha > 2$, X une var de densité :

$$f(x) = \begin{cases} (\alpha - 1)x^{-\alpha} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon de X . Ici, α est un paramètre inconnu que l'on souhaite estimer à l'aide de $(X_1, \dots, X_n)$.

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\alpha}_n$ de α .
2. On pose $\beta = \frac{\alpha - 2}{\alpha - 1}$. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\beta}_n$ de β .

Exercice 8. Soient $\theta > 0$, X la var de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{(x - \theta)^4} & \text{si } x \geq 1 + \theta, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon de X . Ici, θ est un paramètre inconnu que l'on souhaite estimer à l'aide de $(X_1, \dots, X_n)$.

1. Calculer $\mathbb{E}(X - \theta)$ et $\mathbb{E}((X - \theta)^2)$. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. Déduire du résultat de la question 1- un estimateur $\tilde{\theta}_n$ de θ en utilisant la méthode des moments. Calculer son risque quadratique.
3. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n$ de θ .
4. Calculer la fonction de répartition de $\hat{\theta}_n - \theta$. En déduire sa densité.
5. Calculer le risque quadratique de $\hat{\theta}_n$. Entre $\hat{\theta}_n$ et $\tilde{\theta}_n$, quel est le meilleur estimateur de θ lorsque n est supposé être grand ?
6. Calculer le biais de $\hat{\theta}_n$, et en déduire un estimateur sans biais $\hat{\theta}_n^*$ de θ . Montrer, sans calcul intégral, que, lorsque n est supposé être grand, $\hat{\theta}_n^*$ est un meilleur estimateur de θ que $\hat{\theta}_n$.