TD n° 7 : Information de Fisher et vraisemblance

Exercice 1. Soient $\lambda > 0$, $a \in \mathbb{R}^*$, X une *var* dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda^a} \frac{\lambda^{ak}}{k!}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

$n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de X. Ici, le paramètre a est connu et λ est inconnu.

Montrer que l'information de Fisher est

$$I_n(\lambda) = na^2\lambda^{a-2}.$$

Exercice 2. Soient $\theta > -1$, X une *var* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+\theta}{(x+\theta)^2} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de X. Ici, θ est un paramètre inconnu que l'on souhaite estimer à l'aide de $(X_1, \ldots, X_n)$.

Montrer que l'information de Fisher est

$$I_n(\theta) = \frac{n}{3(1+\theta)^2}.$$

Exercice 3. La durée de vie en heures d'un certain type d'ampoule peut être modélisée par une *var* X de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de X.

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ de θ.
2. Calculer l'information de Fisher $I_n(\theta)$.
3. Étudier la convergence en loi de $\left(\sqrt{I_n(\theta)}(\widehat{\theta}_n - \theta)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On suppose que n est suffisamment grand pour approcher la loi de $\sqrt{I_n(\theta)}(\widehat{\theta}_n - \theta)$ à cette loi limite. En utilisant cette approximation, déterminer un intervalle de confiance pour θ au niveau 98%.
4. *Application.* Un expérimentateur a évalué la durée de vie de 1000 ampoules de ce type. Les résultats en heures, notés $(x_1, \ldots, x_{1000})$, donne $\frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} x_i = 95,6$. Construire un intervalle de confiance pour θ au niveau 98% correspondant à ces données.

Exercice 4. Soient $\mu \in \mathbb{R}^*$ et X une *var* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \ln\left(f(x)\right) = \frac{1}{\mu^3}(x - \mu).$$

2. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 5. Soient $\theta > 0$ et X une *var* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{-\left(1+\frac{1}{\theta}\right)} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de X. Ici, θ est un paramètre inconnu que l'on souhaite estimer à l'aide de $(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Montrer que, pour tout $x \geq 1$, on a

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln\left(f(x)\right) = \frac{1}{\theta^2}\left(\ln(x) - \theta\right).$$

   En déduire $\mathbb{E}\left(\ln(X)\right)$ et $\mathbb{V}\left(\ln(X)\right)$.

2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ de θ. Est-il sans biais ?

3. Calculer l'information de Fisher $I_n(\theta)$.

4. Comparer $I_n(\theta)$ avec $\mathbb{V}(\widehat{\theta}_n)$. En déduire que $\widehat{\theta}_n$ est un estimateur efficace de θ. Quel critère aurait-on pu utiliser pour montrer l'efficacité de $\widehat{\theta}_n$ sans calculer $I_n(\theta)$ et $\mathbb{V}(\widehat{\theta}_n)$?

Exercice 6. Soient $\theta > 0$, X une *var* de densité :

$$f(x) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de X. Ici, θ est un paramètre inconnu que l'on souhaite estimer à l'aide de $(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ de θ.

2. Montrer que $\widehat{\theta}_n$ est efficace de θ. En déduire $\mathbb{E}(\widehat{\theta}_n)$, $\mathbb{V}(\widehat{\theta}_n)$ et $I_n(\theta)$.

3. Étudier la convergence en loi de $\left(\sqrt{I_n(\theta)}(\widehat{\theta}_n - \theta)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.