TD n° 8 : Test du rapport de vraisemblance

Exercice 1. Le nombre d'absences par semaine dans une entreprise peut être modélisé par une *var* X suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre inconnu. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de X. On considère les hypothèses :

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \qquad \text{contre} \qquad H_1 : \lambda = \lambda_1,$$

où λ_0 et λ_1 sont deux réels connus tels que $\lambda_1 < \lambda_0$.

1. Exprimer la forme de la zone de rejet optimale du test en fonction de $\sum_{i=1}^{n} X_i$.
2. On dispose des données suivantes, où n_i est le nombre de semaines pour lesquelles on a relevé i absences :

i	0	1	2	3
n_i	5	6	2	3

Donner le résultat du test avec ces données, $\lambda_0 = 1$ et le risque 1%. On admettra que si S est une *var* suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(16)$, alors $\mathbb{P}(S \leq 7) \simeq 0,01$.

Exercice 2. Soient $\mu \in \mathbb{R}$, X une *var* de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de X. Le paramètre $\mu > 0$ est inconnu. On considère les hypothèses :

$$H_0 : \mu = 2 \qquad \text{contre} \qquad H_1 : \mu = 3.$$

On pose

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

et on prend le risque 5%.

Montrer que la zone de rejet optimale du test est de la forme

$$R = \left\{ \overline{X}_n \geq c_* \right\},$$

où $c_* > 0$ est un réel dépendant de n que l'on déterminera.

Exercice 3. Le revenu annuel en euro d'un enseignant à Caen peut être modélisé par une *var* X de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \theta x^{-(\theta+1)} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\theta > 1$ est un paramètre inconnu. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de X. On pose

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i).$$

1. Montrer que T_n est un estimateur efficace de $\frac{1}{\theta}$. En déduire $\mathbb{E}(T_n)$, $\mathbb{V}(T_n)$ et $I_n(\theta)$.
2. Étudier la convergence en loi de $\left(\sqrt{n}\,(\theta T_n - 1)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. On considère les hypothèses :

$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad \text{contre} \qquad H_1 : \theta = \theta_1,$$

où θ_0 et θ_1 sont deux réels connus tels que $\theta_0 < \theta_1$. On suppose que n est grand et on prend le risque 5%.

Montrer que la zone de rejet optimale du test est de la forme

$$R = \{T_n \leq c_*\},$$

où $c_* > 0$ est un réel dépendant de θ_0 et n que l'on déterminera.

Exercice 4. Soient $\theta > 0$, X une *var* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\theta+1}{2} (1 - |x|)^{\theta} & \text{si } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de X. Le paramètre θ est inconnu. On pose

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(1 - |X_i|).$$

1. Montrer que T_n est un estimateur efficace de $-\frac{1}{1+\theta}$. En déduire $\mathbb{E}(T_n)$, $\mathbb{V}(T_n)$ et $I_n(\theta)$.
2. Étudier la convergence en loi de $\left((\theta+1)\sqrt{n}\left(T_n + \frac{1}{1+\theta}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. On considère les hypothèses :

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \qquad \text{contre} \qquad H_1 : \theta > \theta_0,$$

où $\theta_0 > -1$ est un réel connu. On suppose que n est grand et on prend le risque 2%.

Montrer que la zone de rejet optimale du test est de la forme

$$R = \{T_n \geq c_*\},$$

où $c_* > 0$ est un réel dépendant de θ_0 et n que l'on déterminera.